

# PASS

## Vendredi 09 décembre 2022

Module 3	EPREUVE Economie	Heure de début 15h15	Durée 1h30	Heure de fin 16h45
----------	---------------------	-------------------------	---------------	-----------------------

### **CONSIGNES A LIRE AVANT L'EPREUVE**

Vérifiez que votre sujet est complet

L'épreuve comporte :

- 1 cahier questions (13 pages)
- 8 feuilles de brouillon

### **IMPORTANT :**

**Remplissage de la feuille réponses :  
lire consignes et exemple de marquage sur la feuille réponses QCM**

**QCS : une seule réponse exacte**  
**QCM : plusieurs réponses exactes**

Conformément aux dispositions du décret n° 92-657 du 13 juillet 1992, tout étudiant auteur ou complice d'une fraude ou d'une tentative de fraude à l'occasion d'un examen ou concours relève du régime disciplinaire prévu par ledit décret. A ce titre, tout fautif est susceptible d'être traduit devant la Section Disciplinaire du Conseil d'Administration de l'Université, et de se voir appliquer une sanction (avertissement, blâme ou exclusion).

## MICROÉCONOMIE

### Informations générales :

- Les questions de microéconomie sont toutes indépendantes. Chaque question est à propos d'un modèle économique spécifique, avec un ou plusieurs biens (de 1 à 3), où il s'agira de préciser le comportement des agents économiques ou leur(s) conséquence(s). On précise dans chaque question les caractéristiques des agents économiques ainsi que leur environnement. Quand il s'agit de consommation, les consommateurs sont décrits soit, individuellement, par leurs préférences (ou leurs fonctions d'utilité) et/ou par leurs ressources, soit, collectivement, par une fonction de demande qui agrège les informations individuelles. Quand il s'agira d'entreprises, elles seront décrites soit, individuellement, par leur technologie soit, collectivement, par une fonction d'offre ou par une fonction d'offre inverse.
- Sauf mention contraire, une même notation dans deux questions différentes désigne des objets similaires mais distincts, dont la valeur est *a priori* différente d'une question à l'autre.
  - les notations  $x_i$  ou  $q_i$  désignent une quantité de bien  $i$  ;
  - $U(x_1, x_2)$  désigne, dans une économie à deux biens, une fonction d'utilité qui mesure pour un ménage le bien-être associé à la consommation des deux biens, en quantité  $x_1$  et  $x_2$  ;
  - la notation  $p_i$  désigne le prix du bien  $i$ ,  $p$ , sans indice désigne le prix du bien quand il est unique et  $r$  désigne le taux d'intérêt.
  - l'acronyme TMS représente le Taux Marginal de substitution. C'est une valeur relative du bien  $i$  exprimée en unités de bien  $j$ , les biens  $i$  et  $j$  étant toujours précisés ;
- Un formulaire d'aide aux calculs est disponible en annexe à la fin du cahier.

### Questions :

- 1) QCS - On considère un marché d'un bien homogène en concurrence pure et parfaite partiellement caractérisé par la quantité demandée en fonction du prix de vente,  $q = q(p)$ , relation que l'on peut inverser, ce qui se traduit par la demande inverse  $p = p(q)$ , qui est interprétée en économie comme la disposition marginale à payer le bien. On rappelle qu'habituellement on utilise deux espace pour représenter ces relations, l'espace à deux dimensions où l'axe horizontal est la variable prix et l'axe vertical la variable quantité (qu'on désigne par l'espace  $p, q$ ) et l'espace à deux dimensions où l'axe horizontal est la variable quantité et l'axe vertical la variable prix (qu'on désigne par l'espace  $q, p$ ).
- a) la demande inverse se représente dans l'espace  $p, q$  ;
  - b) la demande se représente dans l'espace  $p, q$  ;
  - c) si la demande est décroissante la demande inverse est croissante ;
  - d) si la demande inverse est décroissante la demande est croissante ;
  - e) la demande inverse est la courbe de demande des agents à moindre revenu.

- 2) QCS - Soit un marché d'un bien en concurrence pure et parfaite, dans un contexte où l'on suppose le bien homogène et non divisible. Les producteurs sur ce marché ne peuvent chacun que produire soit 1 unité de bien, soit rien. Ces producteurs sont caractérisés par le coût de produire une unité de bien, qui peut différer d'un producteur à l'autre. On considère qu'il y a 12 producteurs, dont les coûts respectifs sont

$$c^1 = 70 \quad c^2 = 45 \quad c^3 = 35 \quad c^4 = 30 \quad c^5 = 45 \quad c^6 = 30 \\ c^7 = 50 \quad c^8 = 15 \quad c^9 = 15 \quad c^{10} = 45 \quad c^{11} = 15 \quad c^{12} = 65.$$

On considère le cas particulier où le bien se vend à l'équilibre à  $p = 20$ . Après avoir réfléchi à la quantité produite par les producteurs à l'équilibre, indiquer la valeur du surplus net agrégé des producteurs à l'équilibre :

- a) 0 ;
- b) 5 ;
- c) 10 ;
- d) 15 ;
- e) -220.

- 3) QCM - On considère un marché d'un bien homogène en concurrence pure et parfaite. On connaît sur ce marché la demande, définie par la relation  $q(p) = 99 - p$  et l'offre, définie par la relation  $q(p) = 2\sqrt{p}$ . Il y a un équilibre unique sur ce marché. On note  $p^*$  le prix d'équilibre et  $q^*$  la quantité d'équilibre. Parmi ces propositions, lesquelles sont vraies ?

- a)  $p^* = 81$  ;
- b)  $p^* = 18$  ;
- c)  $q^* = 18$  ;
- d)  $q^* = 81$  ;
- e)  $q^* = p^*$ .

- 4) QCM - On considère un bien homogène mais non divisible produit et consommé dans un marché en concurrence pure et parfaite. Sur ce marché, les producteurs peuvent produire soit 1 unité de bien ou zéro. Les producteurs, au nombre de 5, sont caractérisés par leurs coûts respectifs (tous différents) :

$$c^1 = 3 \quad c^2 = 50 \quad c^3 = 77 \quad c^4 = 10 \quad c^5 = 20.$$

On indique par ailleurs que les acheteurs sont disposés à acheter soit 1 unité de bien ou zéro unité. Les acheteurs, au nombre de 5, sont caractérisés par leur disposition respective à payer pour une unité de bien :

$$d^1 = 58 \quad d^2 = 55 \quad d^3 = 43 \quad d^4 = 50 \quad d^5 = 99.$$

On analyse l'équilibre de ce marché et on dénote par  $q^*$  la quantité produite à l'équilibre, par  $p^*$  le prix d'équilibre et par  $S^c$  le surplus net des consommateurs à l'équilibre. Cocher les bonnes réponses :

- a)  $q^* = 2$  ;
- b)  $q^* = 4$  ;
- c)  $p^* = 50$  ;
- d)  $p^* = 32$  ;
- e)  $S^c = 305$ .

- 5) QCM - Dans une économie à trois biens qu'on suppose divisibles, un ménage Z dispose d'un revenu  $R$  égal à quarante huit ( $R = 48$ ). Les prix de ces trois biens sont définis par le marché ; le prix du bien 1 est noté  $p_1$ , le prix du bien 2 est noté  $p_2$  et le prix du bien 3 est noté  $p_3$ . Ces prix s'imposent à ce ménage comme à tous les ménages qui sont dans cette économie. Pour les items a, b, d et e, on considérera plus spécifiquement que :

$$p_1 = 2 \quad p_2 = 4 \quad p_3 = 8.$$

Cocher les affirmations vraies :

- a) Le ménage Z peut acheter le panier (2, 3, 4) ;
- b) le ménage Z peut acheter le panier (4, 3, 2) ;
- c) la contrainte budgétaire du ménage Z a pour équation  $x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 48$  ;
- d) pour le ménage Z la contrainte budgétaire s'écrit  $x_1x_2x_3 \leq 48$  ;
- e) plus généralement, si  $p_1 < p_2 < p_3$  et si un autre ménage peut acheter le panier (2, 3, 4), alors on peut en déduire qu'il pourra acheter le panier (4, 3, 2).

6) QCS - Dans un modèle à deux biens, on s'intéresse dans cette question à un ménage particulier, qui pour un certain système de prix et de revenu, qu'on notera  $(p_1, p_2, R)$ , choisit de ne consommer que du bien 2 en quantité  $q_2 > 0$ . On représente le choix de ce ménage dans l'espace de consommation à deux dimensions, où l'axe horizontal compte la quantité de bien 1 consommée et l'axe vertical, la quantité de bien 2 consommée. On fait l'hypothèse qu'en tout point de l'espace de consommation, on peut calculer une utilité du ménage ainsi qu'un TMS de bien 1 en bien 2 du ménage. Le choix de ne pas consommer de bien 1 pour le système de prix et de revenu  $(p_1, p_2, R)$  –que l'on supposera rationnel– implique nécessairement que

- a) ce ménage a des préférences de type Cobb-Douglas ;
- b)  $p_2 = 0$  ;
- c)  $q_2 = \frac{R}{p_2}$  ;
- d) le ménage a nécessairement pour préférences  $U(q_1, q_2) = q_1$  ;
- e) le ménage continuerait à ne pas consommer de bien 1 si le prix du bien 1 venait à diminuer.

7) QCM - On analyse dans cette question un modèle de consommations à deux biens, tels que les prix respectifs des deux biens sur les marchés sont respectivement  $p_1 = 1$  (prix unitaire du bien 1) et  $p_2 = 2$  (prix unitaire du bien 2). On s'intéresse au choix possible de consommer 48 unités de bien 1 et 12 unités de bien 2, d'un ménage qui disposerait d'un revenu de 72. Parmi les cinq ménages A, B, C, D, E caractérisés par les fonctions d'utilité définies ci-après dans l'espace de consommation à deux biens, indiquer (en cochant) les ménages qui par choix rationnel consomment 48 unités de bien 1 et 12 unités de bien 2 lorsqu'ils disposent d'un revenu égal à 72.

$$\mathbf{A} : U^A(x_1, x_2) = x_1 x_2$$

$$\mathbf{B} : U^B(x_1, x_2) = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$$

$$\mathbf{C} : U^C(x_1, x_2) = x_1^{2/3} x_2^{1/3}$$

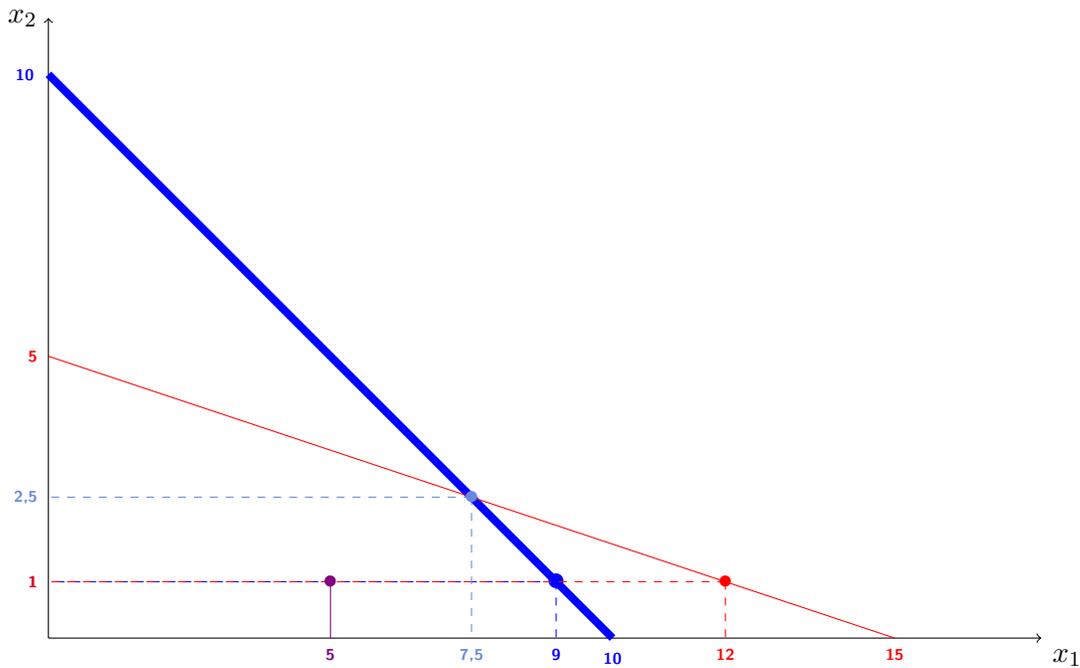
$$\mathbf{D} : U^D(x_1, x_2) = x_1^{2/3} x_2^{2/3}$$

$$\mathbf{E} : U^E(x_1, x_2) = x_1$$

Lorsque  $p_1 = 1$ ,  $p_2 = 2$  et  $R = 72$ ,

- a) le ménage A choisit de consommer le panier (48,12) ;
- b) le ménage B choisit de consommer le panier (48,12) ;
- c) le ménage C choisit de consommer le panier (48,12) ;
- d) le ménage D choisit de consommer le panier (48,12) ;
- e) le ménage E choisit de consommer le panier (48,12).

- 8) QCM - Dans un modèle à deux bien, on s'intéresse à un ménage particulier, qui a initialement pour contrainte budgétaire  $x_1 + x_2 = 10$  et qui consomme initialement le panier (9,1) dans ce premier environnement. Suite à une modification de l'environnement économique de la consommation la nouvelle contrainte budgétaire du ménage est  $x_1 + 3x_2 = 15$ . On trace ci-après les deux contraintes budgétaires considérées sur le même graphiques, ainsi que quelques points de repère. On a peu d'information sur les préférences de ce ménage, hormis que toutes ses courbes d'indifférences sont strictement convexes. Dans l'item d, on envisage (mais seulement pour cet item) que cet agent pourrait avoir des préférences de type Cobb-Douglas. *[On rappelle par ailleurs que lorsque les préférences d'un ménage sont de type Cobb-Douglas, la proportion de revenu affectée à chaque bien de consommation est une caractéristique du ménage, indépendante du système de prix ou du revenu du ménage.]*



- le ménage pourrait consommer le panier (12,1) avec la nouvelle contrainte budgétaire ;
- le bien être du ménage est inférieur avec la nouvelle contrainte budgétaire ;
- si on supposait par ailleurs que les préférences du ménage sont de type Cobb-Douglas on devrait anticiper que le choix optimal du ménage avec la nouvelle contrainte budgétaire est de consommer 12 unités de bien 1 ;
- si on supposait par ailleurs que les préférences du ménage sont de type Cobb-Douglas on devrait anticiper que le choix optimal du ménage avec la nouvelle contrainte budgétaire est de consommer 13,5 unités de bien 1 ;
- si la courbe d'indifférence du ménage passant par le point de coordonnées (9,1) est convexe, on peut anticiper que le ménage va consommer plus de 7,5 unités de bien 1 avec la nouvelle contrainte budgétaire.

9) QCS - une variable  $x(p)$  dépend de la variable  $p$ . On supposera que la dérivée partielle de  $x$  par rapport à  $p$  (notée  $x_p$ ) existe toujours. On rappelle que l'élasticité de la variable  $x$  par rapport à  $p$  (notée  $\varepsilon_p$ ) mesure la variation relative de  $x$  par rapport à  $p$ . Quelle est la relation juste parmi ces cinq propositions ?

- a)  $\varepsilon_p = \frac{x}{p}x_p$
- b)  $x_p = \frac{x}{p}\varepsilon_p$
- c)  $\varepsilon_p = \frac{x_p}{p}x$
- d)  $\varepsilon_p = \frac{x}{x_p}p$
- e)  $\varepsilon_p = x_p$

10) QCM - Soit une firme F en concurrence pure et parfaite, qui produit un bien homogène, à partir de la technologie  $y(x) = Ax^A$ , où  $A < 1$  est un paramètre positif qui caractérise l'efficacité de la firme. On suppose que la fonction  $y(x)$  est dérivable par rapport à  $x$  et on note  $y_x$  sa dérivée. Le prix de vente du bien, noté  $p$ , est déterminé par le marché, ainsi que le prix du facteur de production qu'on notera  $p_x$ . Parmi les propositions suivantes, lesquelles sont vraies

- a) La firme choisit le niveau de bien qu'elle produit en fonction de la relation  $y_x = \frac{p_x}{p}$  ;
- b) la firme choisit le niveau de facteur de production qu'elle utilise selon la relation  $y_x = \frac{p_x}{p}$  ;
- c) la firme choisit le niveau de facteur de production qu'elle utilise selon la relation  $y_x = \frac{p}{p_x}$  ;
- d) la firme choisit le niveau de bien qu'elle produit en fonction de la relation  $y_x = \frac{p}{p_x}$  ;
- e) Étant donné que le paramètre  $A$  est inférieur à 1, la firme ne produit jamais, quels que soient les prix  $p_x$  et  $p$ .

11) QCM - On considère une firme produisant un bien homogène à partir de deux input, travail et capital, en quantités  $L$  et  $K$ , dont la fonction de production est  $q = 8L^{1/8}K^{1/8}$ . Cette firme opère dans un marché en concurrence pure et parfaite. On dénote par  $w$  le prix du facteur travail, par  $k$  le prix du capital, et par  $p$  le prix de vente du bien. On s'intéresse aux choix de production de cette firme sous l'hypothèse que  $p = w = k$ .

- a) La production optimale est comprise entre 0 et 6 ;
- b) la production optimale est comprise entre 7 et 13 ;
- c) la production optimale est comprise entre 14 et 18 ;
- d) la firme utilise 1 unité de facteur travail à l'optimum ;
- e) à l'optimum, la quantité de facteur travail utilisée égale la quantité de facteur capital utilisée.

12) QCS - Dans une économie sur plusieurs périodes, on fait l'hypothèse qu'il existe un marché financier sur lequel on peut prêter ou emprunter d'une période à l'autre, et on suppose que le taux d'intérêt est identique pour l'emprunt ou pour l'épargne, taux qu'on note  $r$ . On s'intéresse à la Valeur actualisée nette (VAN) d'un projet qui coûte 1 M€ aujourd'hui, qui rapporte 500 K€ dans un an, 400 K€ dans deux ans et 600 K€ dans trois ans, où le sigle M€ désigne 1 million d'euro et le sigle K€ désigne cent mille euros. On ne précise pas la valeur de  $r$  qui peut varier d'une question à l'autre. Quelle sont parmi les propositions suivantes celles qui sont vraies ?

- a) la VAN est toujours égale à 1,5 M€ quelle que soit la valeur de  $r$  ;
- b) la VAN est toujours égale à 0,5 M€ quelle que soit la valeur de  $r$  ;
- c) la VAN est égale à 1,5 M€ lorsque  $r = 0$  ;
- d) la VAN est toujours inférieure à 0,5 M€ quand  $r \geq 0$  ;
- e) la VAN est toujours inférieure à 0,5 M€ quand  $r < 0$

**MACROÉCONOMIE****Informations générales :**

— Les questions de macroéconomie sont toutes indépendantes. Toutes les questions se rapportent soit au cours soit aux ED. Il n'y a pas de question liée à l'ouvrage de référence du CORE qui n'aurait pas été vue en cours ou en ED.

**Questions :**

13) QCS - Soit une économie, le Passouchistan, composée de quatre secteurs dédiés à la production de bois, de papier, d'encre et de livres. Le tableau ci-dessous récapitule l'activité économique de cette économie pour l'année n.

**Activité économique du Passouchistan**

	Bois	Papier	Encre	Livre
Coût des intrants	0	60	0	50 (papier) 10 (encre)
Salaires	40	30	20	100
Valeur de la production	100	150	50	260

D'après ces informations, quel sera le montant des valeurs ajoutées produites par le secteur du papier et du bois

- a) 60 pour le secteur du bois et 60 pour le secteur du papier;
- b) 100 pour le secteur du bois et 150 pour le secteur du papier
- c) 40 pour le secteur du bois et 60 pour le secteur du papier
- d) 100 pour le secteur du bois et 90 pour le secteur du papier
- e) 60 pour le secteur du bois et 90 pour le secteur du papier.

**14) QCM - Lesquelles de ces affirmations concernant l'Indice des Prix à la Consommation (IPC) et Déflateur du PIB sont exactes?**

- a) Le déflateur du PIB nécessite le choix d'une année de base contrairement à l'IPC
- b) Les pondérations des différents secteurs sont fixées dans le calcul de l'IPC mais pas dans celui du déflateur du PIB
- c) Le déflateur du PIB prend en compte les évolutions de prix des biens exportés mais pas l'IPC
- d) L'IPC prend en compte l'évolution des prix des biens importés mais pas le déflateur du PIB
- e) L'IPC tient compte des possibilités de substitution dans la consommation mais pas le déflateur du PIB

**15) QCM - Dans lesquels de ces cas la masse monétaire augmentera de manière certaine?**

- a) Si le coefficient de réserves baisse et que le coefficient d'encaisses augmente?
- b) Si le coefficient de réserves augmente et que le coefficient d'encaisses augmente?
- c) Si le coefficient de réserves baisse et que le coefficient d'encaisses baisse?
- d) Si le coefficient de réserves augmente et que le coefficient d'encaisses baisse?
- e) Si la Banque Centrale achète des bons du Trésor

**16) QCM - Supposons qu'une banque centrale souhaite diminuer l'offre de monnaie. Laquelle de ces opérations lui permettrait de réaliser cet objectif**

- a) Acheter des bons du Trésor et augmenter les taux
- b) Vendre des bons du Trésor et baisser le coefficient de réserves
- c) Augmenter les taux d'intérêt et vendre des bons du Trésor
- d) Baisser le coefficient d'encaisses et augmenter le coefficient de réserve
- e) Augmenter les taux d'intérêt et augmenter le coefficient de réserves

- 17) QCS - Supposez que la base monétaire d'un pays s'élève à 1 000 billets de 1€. La population garde un quart de ses avoirs sous forme de billets et pièces. Les banques gardent un quart des dépôts en réserves. A combien s'élèvera la masse monétaire totale?
- a) 4 000€
  - b) 1 000€
  - c) 2 500€
  - d) 3 500€
  - e) 1 250€
- 18) QCS - Supposons que la vitesse de circulation de la monnaie soit de 2 et reste constante. La croissance du PIB réel est de 3%, tandis que celle de la masse monétaire est de 2%. Quel sera le montant de l'inflation?
- a) Elle sera de 1%
  - b) Elle sera de -1%
  - c) Elle sera de 4%
  - d) Elle sera de -4%
  - e) Elle sera nulle
- 19) QCS - Supposons que l'économie produise 100 bidules à 2€ pièce et que la vitesse de circulation de la monnaie soit de 2. Quelle doit être la masse monétaire et de combien la vitesse de circulation de la monnaie doit-elle augmenter si l'objectif de masse monétaire est de 50?
- a) La masse monétaire doit être de 50 et la vitesse de circulation doit passer à 1
  - b) La masse monétaire doit être de 50 et la vitesse de circulation doit rester constante
  - c) La masse monétaire doit être de 100 et la vitesse de circulation doit rester constante
  - d) La masse monétaire doit être de 100 et la vitesse de circulation doit doubler
  - e) La masse monétaire doit être de 100 et la vitesse de circulation doit être divisée par 2

20) QCM - Laquelle de ces situations correspond à une taxe d'inflation si le taux d'inflation est de 6%?

- a) l'Etat décide d'augmenter son taux d'imposition de 6%
- b) Le revenu des retraités augmente de 3% par an
- c) La perception d'un taux d'intérêt nominal de 4% sur votre épargne
- d) Le fait que l'Etat voit ses recettes fiscales baisser de 6%
- e) Le fait qu'un Etat endetté puisse être tenté d'encourager l'inflation

21) QCM - Si une personne au chômage décide de partir à la retraite à 60 ans, ceci

- a) fera baisser le taux de chômage
- b) laissera le taux de chômage inchangé
- c) baissera le taux de participation au marché du travail
- d) augmentera le taux de participation au marché du travail
- e) Baissera le taux d'emploi

22) QCS - Le taux de chômage naturel inclut

- a) Le taux de chômage conjoncturel et structurel
- b) Le taux de chômage conjoncturel et frictionnel
- c) Le taux de chômage frictionnel et structurel
- d) Le taux de chômage structurel uniquement
- e) Le taux de chômage conjoncturel, structurel et frictionnel

23) QCM - Laquelle de ces affirmations est exacte

- a) Un salaire minimum inférieur au salaire d'équilibre sur le marché du travail engendre du chômage
- b) Un salaire minimum supérieur au salaire d'équilibre sur le marché du travail engendre du chômage
- c) Que le chômage est un excès de demande de travail
- d) Que le chômage est un excès d'offre de travail
- e) Qu'à l'équilibre sur le marché du travail, il n'y a pas de chômage

24) QCS - Soit la fonction de production suivante  $Y = 2K^{0.5}L^{0.5}$  où K représente le capital, L le travail, et Y la production totale. Quels seront les salaires et les taux d'intérêt si l'économie emploie quatre fois moins de travail que de capital?

- a) Le salaire sera quatre fois supérieur au taux d'intérêt
- b) Le salaire sera de 2 et le taux d'intérêt de 0.5
- c) Le salaire sera de 1 et le taux d'intérêt de 0.25
- d) Le salaire et le taux d'intérêt seront égaux à 0.5
- e) Le salaire et le taux d'intérêt seront égaux à 4

25) QCS - Soit une économie caractérisée par les données suivantes, où  $r$  est le taux d'intérêt:

PIB	Y	16 000
Dépenses publiques	G	5 000
Recettes fiscales	T	4 000
Consommation	C	$2000 + \frac{3}{4} \times (\text{revenu disponible})$
Investissement	I	$240 - 100r$

Quel sera le montant de l'épargne nationale et le taux d'intérêt d'équilibre?

- a) L'épargne nationale sera de 1 000 et le taux d'intérêt sera inférieur à 1
- b) L'épargne nationale sera de 1 000 et le taux d'intérêt sera supérieur à 1
- c) L'épargne nationale sera nulle et le taux d'intérêt supérieur à 2
- d) L'épargne nationale sera nulle et le taux d'intérêt inférieur à 2
- e) L'épargne nationale sera de -1 000 et le taux d'intérêt nul

FORMULAIRE DES QUESTIONS DE MICROÉCONOMIE

$$q = 36 - 12p \quad \Leftrightarrow \quad p = 3 - \frac{1}{12}q$$

$$99 - p = 2\sqrt{p} \quad \Leftrightarrow \quad 100 = (1 + \sqrt{p})^2 \quad 81 = 9 * 9$$

$$99 \geq 58 \geq 55 \geq 50 \geq 43 \quad 3 \leq 10 \leq 20 \leq 50 \leq 77$$

$$(99 - p) + (58 - p) + (55 - p) + (50 - p) + (43 - p) = 305 - 5p$$

$$(99 - p) + (58 - p) + (55 - p) + (50 - p) = 262 - 4p$$

$$(99 - p) + (58 - p) + (55 - p) = 212 - 3p$$

$$2 * 2 + 3 * 4 + 4 * 8 \leq 48$$

$$48 + 2 * 12 = 72$$

$$48 = 4 * 12$$

$$\frac{48}{72} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{24}{72} = \frac{1}{3}$$

la dérivée de  $x^a$  par rapport à  $x$  est  $ax^{a-1} = a\frac{x^a}{x}$

$$x^{-a} = \frac{1}{x^a}$$

$$1^a = 1, \forall a \in \mathbb{R}$$