Université de Tours
Faculté de Médecine de TOURS

Année universitaire 2022-2023
Session 1

PASS
Mercredi 3 mai 2023

Module 7	EPREUVE Maths	Heure de début 15h45	Durée 1h30	Heure de fin 17h15

CONSIGNES A LIRE AVANT L'EPREUVE

Vérifiez que votre sujet est complet

L'épreuve comporte :

- **1 cahier de 25 questions (14 pages)**
- **6 feuilles de brouillon**

IMPORTANT :

Remplissage de la feuille réponses :
lire consignes et exemple de marquage sur la feuille réponses QCM

QCS : une seule réponse exacte
QCM : plusieurs réponses exactes

Conformément aux dispositions du décret n° 92-657 du 13 juillet 1992, tout étudiant auteur ou complice d'une fraude ou d'une tentative de fraude à l'occasion d'un examen ou concours relève du régime disciplinaire prévu par ledit décret. A ce titre, tout fautif est susceptible d'être traduit devant la Section Disciplinaire du Conseil d'Administration de l'Université, et de se voir appliquer une sanction (avertissement, blâme ou exclusion).

Universités de Tours et Orléans

PASS option Mathématiques, Semestre 2 Session 1

Instructions

- Il y a 25 questions.
- Les questions sont indépendantes. En particulier, une même notation dans deux questions différentes désigne deux objets différents.
- L'ordre des questions n'a pas d'importance. Elles ne sont pas nécessairement dans l'ordre de difficulté croissante.

1) QCS - On considère l'ensemble E, sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, et le vecteur $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$, définis ci-dessous. Le vecteur $\vec{u}$ dépend d'un paramètre réel a.

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} s \\ t-s \\ t+s \end{pmatrix},\ t, s \in \mathbb{R} \right\},\ \vec{u} = \begin{pmatrix} 1+a \\ a \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Choisir l'unique proposition correcte :

a) $\forall a \in \mathbb{R}, \vec{u} \notin E$

b) $\forall a \in \mathbb{R}, \vec{u} \in E$

c) $\vec{u} \in E$ si et seulement si $a = 0$.

d) $\vec{u} \in E$ si et seulement si $a = \frac{3}{2}$.

e) $\vec{u} \in E$ si et seulement si $a = -\frac{2}{3}$.

2) QCM - On considère dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs suivants :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ , \ \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ , \ \vec{w} = \vec{u} - \vec{v},$$

ainsi que les sous-espaces vectoriels $E = \mathrm{Vect}(\vec{u})$ et $F = \mathrm{Vect}(\vec{v})$. Quelles sont les affirmations correctes ?

a) $\vec{w} \in E + F$

b) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in E + F$

c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in E + F$

d) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in E + F$

e) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in E + F$

3) QCM - On considère les vecteurs de $\mathbb{C}^2$ suivants :

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ , \ \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} \ , \ \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \ , \ \vec{u}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}.$$

Parmi les familles suivantes, lesquelles sont des bases de $\mathbb{C}^2$?

a) $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$

b) $(\vec{u}_2, \vec{u}_3)$

c) $(\vec{u}_3, \vec{u}_4)$

d) $(\vec{u}_1, \vec{u}_4)$

e) $(\vec{u}_2, \vec{u}_4)$

4) QCM - On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants :

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ , \ \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \ , \ \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ , \ \vec{u}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont correctes ?

a) La famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est libre.

b) La famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.

c) La famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_4)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.

d) La famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4)$ est libre.

e) La famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.

5) QCM - On considère les deux sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$:

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} t+s \\ t-s \\ t \end{pmatrix} \, , \; t, s \in \mathbb{R} \right\} \;,\; F = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} , \left\{ \begin{array}{cccc} x_1 & +x_2 & -2x_3 & = 0 \\ x_1 & -x_2 & & = 0 \end{array} \right. \right\}.$$

Quelles sont les réponses correctes ?

a) $E = F$

b) $E \subset F$

c) $F \subset E$

d) $\dim E = 2$

e) $\dim F = 2$

6) QCS - Soit f la fonction définie sur $[-\frac{4}{3}, +\infty[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ donnée par l'expression $f(x) = \sqrt{3x+4}$. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie de la façon suivante :

$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N}\ ,\ u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$$

Déterminer l'unique réponse correcte.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = -\frac{4}{3}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 4$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = -1$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$

7) QCM - On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par l'expression :

$$u_n = n\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + 1 + \frac{1}{n}$$

Quelles sont les affirmations correctes ?

a) On peut extraire de la suite (u_n) une suite qui tend vers 0.

b) La suite (u_n) est bornée.

c) $\forall n \in \mathbb{N}^*\ ,\ u_n \geqslant 0$.

d) On peut extraire de la suite (u_n) une suite qui tend vers 1.

e) On peut extraire de la suite (u_n) une suite qui tend vers $+\infty$.

8) QCS - Soit g une fonction de $[0,1]$ à valeurs dans $[0,1]$. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie de la façon suivante :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{10} \\ \forall n \in \mathbb{N}\ ,\ u_{n+1} = g(u_n). \end{cases}$$

On sait que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et qu'elle tend vers $\frac{1}{2}$ quand n tend vers l'infini. Les figures ci-dessous représentent les graphes de cinq fonctions : f_a, f_b, f_c, f_d et f_e. Une fonction parmi ces cinq est la fonction g. Laquelle ?

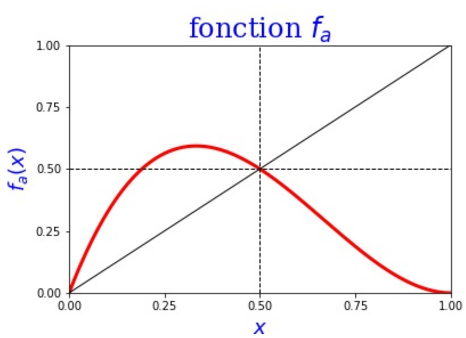
a) $g = f_a$

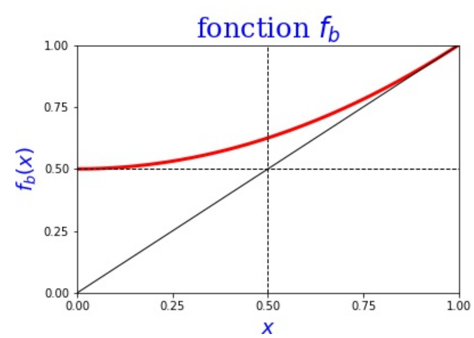
b) $g = f_b$

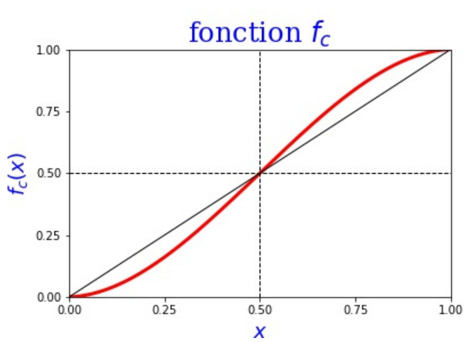
c) $g = f_c$

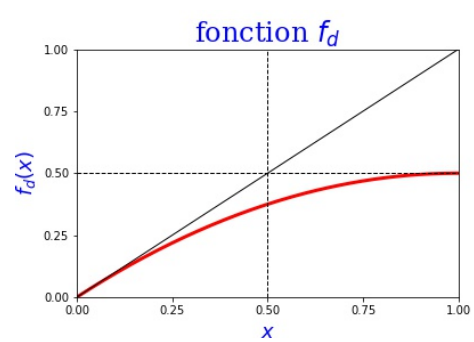
d) $g = f_d$

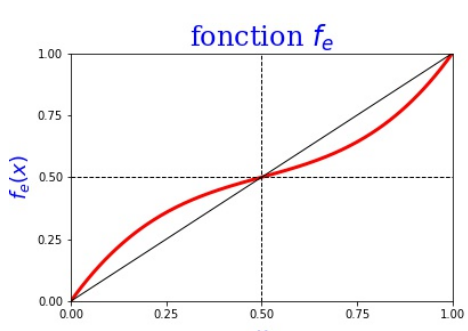
e) $g = f_e$











9) QCS - On considère la fonction f_a suivante, qui dépend du paramètre a :

$$f_a(x) = \frac{x(1-\cos(x)) + ax^3}{x\sin(x) + x^2}$$

On s'intéresse au comportement de f_a au voisinage de $+\infty$. Pour quelle valeur de a a-t-on

$$f_a(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x \ ?$$

a) $a = \frac{1}{2}$

b) $a = 1$

c) $a = \frac{3}{2}$

d) $a = 0$

e) $a = 2$

10) QCM - Parmi les fonctions suivantes :

$f_1(x) = x^2\big(1-\cos(x)\big)$, $f_2(x) = x^2\ln(x)$, $f_3(x) = x^2\sin(x)+x^2$, $f_4(x) = x^3e^x$, $f_5(x) = x\sin(x)\ln(1+x)$,

lesquelles sont négligeables devant x^2 en $x = 0$?

a) f_1

b) f_2

c) f_3

d) f_4

e) f_5

11) QCS - On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par l'expression

$$f(x) = \ln\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right).$$

Quelle est l'unique proposition correcte ?

a) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x)}{\sin(x^2)} = 0$

b) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x)}{\sin(x^2)} = 1$

c) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x)}{\sin(x^2)} = \dfrac{1}{2}$

d) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x)}{\sin(x^2)} = +\infty$

e) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x)}{\sin(x^2)} = -\dfrac{3}{4}$

12) QCS - On considère la fonction f suivante :

$$f(x) = \frac{1 + 2x + 2x^2}{1 + x}$$

Quel est le DL en 0 de f à l'ordre 3 ?

a) $f(x) = 1 + x + \underset{x \to 0}{o}(x^3)$

b) $f(x) = 1 + 3x + x^2 + \underset{x \to 0}{o}(x^3)$

c) $f(x) = 1 + x + x^2 - x^3 + \underset{x \to 0}{o}(x^3)$

d) $f(x) = 1 + x - x^3 + \underset{x \to 0}{o}(x^3)$

e) $f(x) = 1 + x - x^2 - x^3 + \underset{x \to 0}{o}(x^3)$

13) QCS - On considère l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^3 \frac{x}{2\sqrt{1+x}} dx.$$

Quelle est la réponse correcte ?
Indication : On peut effectuer le changement de variable $y = \sqrt{1+x}$.

a) $I = \frac{4}{3}$

b) $I = \frac{8}{3}$

c) $I = \frac{11}{3}$

d) $I = \frac{16}{3}$

e) $I = \frac{20}{3}$

14) QCS - On considère l'intégrale suivante :

$$I = \int_1^2 x \ln(x) dx.$$

Quelle est la réponse correcte ?

a) $I = 2\ln(2) - \frac{5}{4}$

b) $I = 4\ln(2) - 1$

c) $I = 2\ln(2) - 1$

d) $I = 4\ln(2) - \frac{5}{4}$

e) $I = 2\ln(2) - \frac{3}{4}$

15) QCS - On considère l'intégrale suivante, qui dépend de $n \in \mathbb{N}$:

$$I_n = \int_0^2 e^{-n^2 x} dx.$$

Quelle est la proposition correcte ?

a) $I_n \underset{n\to\infty}{\sim} -\frac{1}{n^2}$

b) $I_n \underset{n\to\infty}{\sim} -\frac{1}{n^2}e^{-4n^2}$

c) $I_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$

d) $I_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{2}{n^2}e^{-2n^2}$

e) $I_n \underset{n\to\infty}{\sim} -\frac{1}{n^2}e^{-2n^2}$

16) QCS - On considère l'application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$:

$$f \ : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x - 2y + z \\ -y + z \\ x - y \end{pmatrix},$$

et les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \ , \ \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On rappelle que $\vec{0}_3$ est le vecteur nul de $\mathbb{R}^3$. Choisir l'unique réponse correcte :

a) $\text{Ker}\, f = \left\{\vec{0}_3\right\}$

b) $\text{Ker}\, f = \{\vec{u}\}$

c) $\text{Ker}\, f = \{\vec{v}\}$

d) $\text{Ker}\, f = \text{Vect}\,\{\vec{u}\}$

e) $\text{Ker}\, f = \text{Vect}\,\{\vec{v}\}$

17) QCS - On considère les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^2$:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

et l'application linéaire f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par les relations :

$$f(\vec{u}) = \vec{u} \ , \ f(\vec{v}) = 2\vec{u}.$$

On note M_f la matrice de l'application linéaire f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Quelle est la proposition correcte ?
Indication : si on note $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$, remarquer que $\vec{u} = -\vec{e}_1$ et $\vec{v} = e_2$.

a) $M_f = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) $M_f = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

c) $M_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

d) $M_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

e) $M_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

18) QCM - On considère l'application linéaire f_a de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie comme suit :

$$f_a \ : \ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x+y \\ x-2y+z \\ y+az \end{pmatrix}$$

f_a dépend du paramètre réel a. On s'intéresse au rang de f_a. Quelles sont les propositions correctes ?

a) Si $a = -1$, $\mathrm{rg}(f_a) = 2$.

b) Si $a = 1$, $\mathrm{rg}(f_a) = 2$.

c) $\forall a \in \mathbb{R}$, $\mathrm{rg}(f_a) = 3$.

d) Si $a = -1$, $\mathrm{rg}(f_a) = 3$.

e) Si $a = 1$, $\mathrm{rg}(f_a) = 3$.

19) QCM - On considère la matrice A :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

et la matrice $B = A^{-1}$, dont on note les coefficients (b_{ij}), pour $1 \leqslant i \leqslant 3$ et $1 \leqslant j \leqslant 3$:

$$B = A^{-1} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}.$$

Quelles sont les affirmations correctes ?

a) $b_{12} = 1$

b) $b_{13} = -1$

c) $b_{33} = 0$

d) $b_{22} = \frac{1}{3}$

e) $b_{23} = 0$

20) QCS - On considère la fonction f définie par l'expression :

$$f(x) = \frac{x + x^2 - 1}{x + 1}.$$

On s'intéresse au développement asymptotique de f au voisinage de $+\infty$. Quel est l'unique proposition correcte ?

a) $f(x) = x - \dfrac{1}{x} + \underset{x \to +\infty}{o}\left(\dfrac{1}{x}\right)$

b) $f(x) = -1 + 2x^2 + \underset{x \to +\infty}{o}\left(x^3\right)$

c) $f(x) = -1 + 2x + \underset{x \to +\infty}{o}(x)$

d) $f(x) = -1 + \dfrac{2}{x} + \underset{x \to +\infty}{o}\left(\dfrac{1}{x}\right)$

e) $f(x) = x + 2 + \underset{x \to +\infty}{o}(1)$

21) QCS - On considère la matrice A :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Quelle est l'unique proposition correcte ?

a) $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

b) $A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

c) $A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$

d) $A^5 = A$

e) $A^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

22) QCM - On considère la permutation suivante de $\mathcal{S}_9$:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 4 & 6 & 2 & 7 & 8 & 9 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Quelles sont les affirmations correctes ?

a) $\sigma^{18} = \mathrm{id}$

b) σ^9 a exactement trois points fixes.

c) σ^8 a exactement quatre points fixes.

d) σ^{10} a exactement deux points fixes.

e) $\sigma^6 = \mathrm{id}$.

23) QCM - On considère les deux permutations suivantes de $\mathcal{S}_7$:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 5 & 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Quelles sont les affirmations correctes ?

a) $(\sigma \circ \tau)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$

b) $(\sigma \circ \tau)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 7 & 5 \end{pmatrix}$

c) $(\sigma \circ \tau)^{-1} = \sigma^{-1} \circ \tau^{-1}$

d) $(\sigma \circ \tau)^{-1} = \tau^{-1} \circ \sigma^{-1}$

e) $\sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma$

24) QCS - On considère la fonction f, définie sur $]0, +\infty[$ par l'expression suivante :

$$f(x) = x\ln(x) - 3x^2 + \frac{4}{3}x^3.$$

Quelle est l'unique proposition correcte ?

a) f est convexe sur $]0, \frac{1}{4}[$, concave sur $]\frac{1}{4}, \frac{1}{2}[$ et convexe sur $]\frac{1}{2}, +\infty[$.

b) f est concave sur $]0, \frac{1}{4}[$, convexe sur $]\frac{1}{4}, \frac{1}{2}[$ et concave sur $]\frac{1}{2}, +\infty[$.

c) f est concave sur $]0, \frac{1}{2}[$ et convexe sur $]\frac{1}{2}, +\infty[$.

d) f est convexe sur $]0, \frac{1}{2}[$ et concave sur $]\frac{1}{2}, +\infty[$.

e) f est convexe sur $]0, +\infty[$.

25) QCS - La Figure 1 ci-dessous représente le graphe de la fonction f autour de $x = 0$.

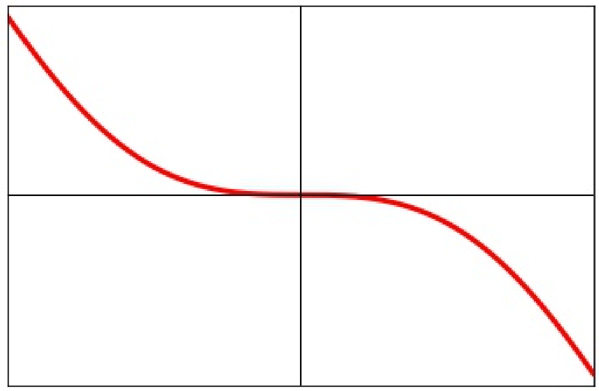


FIGURE 1 – En trait gras le graphe $y = f(x)$, en trait fin les axes $y = 0$ et $x = 0$.

Quelle est l'unique proposition correcte ?

a) $f(x) = -x^4 + \underset{x \to 0}{o}(x^4)$

b) $f(x) = x^3 + \underset{x \to 0}{o}(x^3)$

c) $f(x) = x - x^2 + \underset{x \to 0}{o}(x^2)$

d) $f(x) = -x^3 + \underset{x \to 0}{o}(x^3)$

e) $f(x) = x + x^3 + \underset{x \to 0}{o}(x^3)$