Université de Tours
Faculté de Médecine de TOURS **Année universitaire 2022-2023**

PASS
Vendredi 09 décembre 2022

Module 3	EPREUVE Mathématiques	Heure de début 15h15	Durée 1h30	Heure de fin 16h45

CONSIGNES A LIRE AVANT L'EPREUVE

Vérifiez que votre sujet est complet

L'épreuve comporte :

- **1 cahier 25 questions (13 pages)**
- **4 feuilles de brouillon**

IMPORTANT :

Remplissage de la feuille réponses :
lire consignes et exemple de marquage sur la feuille réponses QCM

QCS : une seule réponse exacte
QCM : plusieurs réponses exactes

Instructions

- Le sujet fait 13 pages et comporte 25 questions.
- Les questions notées QCS ont une unique bonne réponse, les questions notées QCM ont au moins deux bonnes réponses.
- Les questions sont indépendantes. En particulier, la même notation dans deux questions différentes désigne deux objets différents.

Questions

1) QCS -Pour x dans $\mathbb{R}$, on note

$$f(x) = (18)^{2x-1}\left(\frac{27}{2}\right)^{1-x}.$$

Quelle expression alternative est valable pour tout x dans $\mathbb{R}$?

a) $f(x) = \frac{3}{4}\left(\frac{3}{8}\right)^{x}$.

b) $f(x) = \left(\frac{4}{3}\right)^{3x-2}$.

c) $f(x) = \frac{3}{4}(24)^{x}$.

d) $f(x) = (6)^{x+1}$.

e) $f(x) = \frac{(6)^{x}}{27}$.

2) QCS -On cherche à déterminer l'ensemble $I \subset \mathbb{R}$ tel que

$$0 < \frac{x-1}{2x+3} \leqslant 1$$

si et seulement si $x \in I$. Parmi les réponses suivantes, laquelle est correcte ?

a) $I =]-\infty, -4]$.

b) $I =]-\infty, -4] \cup]1, +\infty[$.

c) $I = [-4, -\frac{3}{2}[\cup] -\frac{3}{2}, 1[$.

d) $I =]1, +\infty[$.

e) $I = [-4, -\frac{3}{2}[\cup]1, +\infty[$.

3) QCS -Soit P et Q les polynômes

$$P(X) = (X-1)(X-2), \quad \text{et} \quad Q(X) = (X+1)^3.$$

On calcule le polynôme $R = 2P + Q$. Parmi les propositions suivantes, quel est le résultat correct ?

a) $R(X) = X^3 + 4X^2 + 3$.

b) $R(X) = X^3 - 4X^2 + 4X + 5$.

c) $R(X) = X^3 + 4X^2 - X + 3$.

d) $R(X) = X^3 + 5X^2 + 5$.

e) $R(X) = X^3 + 5X^2 - 3X + 5$.

4) QCM -Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on définit le polynôme P_a par

$$P_a(X) = X^3 + (2-a)X^2 - 3X + a.$$

Par exemple, pour $a = -1$, le polynôme P_{-1} est donné par

$$P_{-1}(X) = X^3 + 3X^2 - 3X - 1.$$

Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont correctes ?

a) $\forall a \in \mathbb{R}, \quad P_a(1) = 0.$

b) $\forall a \in \mathbb{R}, \quad P_a(-1) = 0.$

c) Pour $a = -1$, le polynôme P_{-1} admet trois racines réelles distinctes.

d) Pour $a = 1$, le polynôme P_1 admet trois racines réelles distinctes.

e) Pour $a = 1$, le polynôme P_1 admet une unique racine réelle.

5) QCS -On donne le nombre complexe $z = 2 + i$ et on calcule

$$A = \frac{z^2 + \overline{z}}{z+i}.$$

Parmi les égalités suivantes, laquelle est correcte ?

a) $A = 4 - i.$

b) $A = \dfrac{4-i}{2}.$

c) $A = \dfrac{2-3i}{2}.$

d) $A = 2 - 3i.$

e) $A = \dfrac{3+4i}{2}.$

6) QCS -Etant donnés trois nombres complexes a, b, c, on dit que *les points d'affixe a, b et c sont alignés dans cet ordre* lorsque le point B d'affixe b, appartient au segment $[AC]$ où A est le point d'affixe a et C celui d'affixe c.

On appelle α l'unique angle tel que $\alpha \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et $\tan \alpha = -\frac{3}{5}$. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont correctes ?

a) Les points d'affixe 0, $5e^{i\alpha}$ et $-3 + 5i$ sont alignés dans cet ordre.

b) Les points d'affixe 0, $6e^{i\alpha}$ et $5 - 3i$ sont alignés dans cet ordre.

c) Les points d'affixe 0, $5e^{i\alpha}$ et $5 - 3i$ sont alignés dans cet ordre.

d) Les points d'affixe 0, $5e^{i\alpha}$ et $-5 + 3i$ sont alignés dans cet ordre.

e) Les points d'affixe 0, $6e^{i\alpha}$ et $3 - 5i$ sont alignés dans cet ordre.

7) QCS -Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par

$$\forall n \geqslant 1, \quad u_n = \frac{2n^2e^{-n} - n}{3n + \ln n}.$$

Parmi les égalités suivantes, laquelle est correcte ?

a) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \frac{2}{3}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = -\frac{1}{3}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 2$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = -1$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$

8) QCS -Soit $(v_n)_{n\geqslant 3}$ la suite définie par

$$v_n = n^2 + 1 - \sqrt{n^4 - 2n^2}$$

Parmi les égalités suivantes, laquelle est correcte ?

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty.$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0.$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1.$

d) $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 2.$

e) $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty.$

9) QCS -On note $\mathcal{D}_f$ le domaine maximal de définition de la fonction f définie par

$$f(x) = \left(e^{2x} - 4e^x + 4\right)^{-\frac{3}{4}}.$$

Parmi les égalités suivantes, laquelle est correcte ?

a) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}.$

b) $\mathcal{D}_f =]\ln 2, +\infty[.$

c) $\mathcal{D}_f = [\ln 2, +\infty[.$

d) $\mathcal{D}_f =]-\infty, \ln 2].$

e) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{\ln 2\}.$

10) QCM -Soit f une fonction décroissante, définie sur $\mathbb{R}$ et telle que $f(0) = 2$, $f(1) = 0$. On note u la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $u(x) = \ln x$.

Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont correctes ?

a) Le domaine maximal de définition de $f \circ u$ est $]1, +\infty[$.

b) Le domaine maximal de définition de $f \circ u$ est $]0, +\infty[$.

c) La fonction $f \circ u$ est croissante sur son domaine maximal de définition.

d) La fonction $f \circ u$ est décroissante sur son domaine maximal de définition.

e) Le domaine de définition de $u \circ f$ est $]1, +\infty[$

11) QCS - Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{x \ln x - 1}{xe^{-x} + \sqrt{x}}.$$

On calcule la limite de f quand x tend vers 0^+. Quelle égalité est correcte ?

a) $\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$.

b) $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$.

c) $\lim_{x \to 0^+} f(x) = -1$.

d) $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$.

e) $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \frac{1}{2}$.

12) QCS -Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \ln(1+x^2) + (x^2 - 2x)\ln 2.$$

Pour $h \neq 0$, on définit

$$g(h) = \frac{f(1+h)}{h}.$$

On observe que g représente le taux d'accroissement de la fonction f en 1.
Parmi les égalités suivantes, laquelle est correcte ?

a) $\lim\limits_{h \to 0^+} g(h) = +\infty.$

b) $\lim\limits_{h \to 0^+} g(h) = -\infty.$

c) $\lim\limits_{h \to 0^+} g(h) = \frac{1}{2}.$

d) $\lim\limits_{h \to 0^+} g(h) = 1.$

e) $\lim\limits_{h \to 0^+} g(h) = -2\ln 2.$

13) QCS -Soit $a \in \mathbb{R}$ un nombre donné et f la fonction définie sur $]-\infty, 0[$ par

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x - 1}{(x+1)(x^3 - x^2 + 2x - 2)} \quad \text{si} \quad x \neq -1,$$

et $f(-1) = a$. Pour quelle valeur de a, la fonction f est-elle continue sur $]-\infty, 0[$?

a) $a = \frac{1}{6}.$

b) $a = 2.$

c) $a = -\frac{1}{6}.$

d) $a = -2.$

e) $a = 0.$

14) QCS -Soit F une fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui est continue, décroissante et impaire, et telle que

$$\lim_{X \to -\infty} F(X) = +\infty, \quad F(-1) = 1.$$

Soit u la fonction définie sur $]-1, 1[$ par $u(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$. On note I l'image de l'intervalle $]-1,1[$ par la fonction $F \circ u$.

Parmi les égalités suivantes, laquelle est correcte ?

a) $I =]-\infty, -1]$.

b) $I = \mathbb{R}$.

c) $I =]-1, 1[$.

d) $I =]1, +\infty[$.

e) $I = [1, +\infty[$.

15) QCS -Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (x^2+1)^{\frac{2}{3}} \cos x.$$

On note f' la dérivée de f.

Parmi les égalités suivantes, laquelle est valable pour tout x dans $\mathbb{R}$?

a) $f'(x) = \dfrac{4x \sin x}{3(x^2+1)^{\frac{1}{3}}}$.

b) $f'(x) = \dfrac{4x \cos x}{3(x^2+1)^{\frac{1}{3}}} - (x^2+1)^{\frac{2}{3}} \sin x$.

c) $f'(x) = -\dfrac{4x \sin x}{3(x^2+1)^{\frac{1}{3}}}$.

d) $f'(x) = -\dfrac{2 \sin x}{3(x^2+1)^{\frac{1}{3}}}$.

e) $f'(x) = \dfrac{2 \cos x}{3(x^2+1)^{\frac{1}{3}}} - (x^2+1)^{\frac{2}{3}} \sin x$.

16) QCS -Soit u une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = u^2(x)e^{u(x)} + 1.$$

On note f' la dérivée de f.
Parmi les égalités suivantes, laquelle est valable pour tout x dans $\mathbb{R}$?

a) $f'(x) = (u'(x))^2\,(2u(x) + u^2(x))\,e^{u(x)}.$

b) $f'(x) = u'(x)\,(2u(x) + u^2(x))\,e^{u(x)}.$

c) $f'(x) = (u'(x))^2\,(2u(x) + u^2(x))\,e^{u(x)} + 1.$

d) $f'(x) = (2u(x) + u^2(x))\,e^{u(x)}.$

e) $f'(x) = u'(x)\,(2u(x) + u^2(x))\,e^{x}.$

17) QCS -Soit I l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos^3 x}\,dx.$$

Parmi les égalités suivantes, laquelle est correcte ?

a) $I = -\frac{1}{2}.$

b) $I = -1.$

c) $I = 1.$

d) $I = \frac{1}{2}.$

e) $I = \frac{1}{6}.$

18) QCS -Soit A la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

On calcule $B = {}^tAA$.

Parmi les égalité suivantes, laquelle est correcte ?

a) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

c) $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$.

d) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$.

e) $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

19) QCS -Dans $\mathbb{R}^3$ muni de son repère orthonormé canonique, on note S l'ensemble des solutions du système

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & - & y & + & z & = & 1 \\ 2x & & & + & 2z & = & 2 \end{array}\right..$$

Parmi les affirmations suivantes, laquelle est correcte ?

a) Le système donné n'a pas de solution : $S = \emptyset$.

b) L'ensemble S est une droite.

c) L'ensemble S contient un unique point.

d) L'ensemble S est un plan.

e) L'ensemble S est tout l'espace : $S = \mathbb{R}^3$.

20) QCS -Soit f la fonction dérivable définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + x$. On admet que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. On note g sa bijection réciproque (c'est-à-dire $g = f^{-1}$) et g' la dérivée de g. On observe que $f(-1) = -2$ et $f(-2) = -10$.

Parmi les égalités suivantes, laquelle est correcte ?

a) $g'(-2) = \dfrac{1}{4}$.

b) $g'(-2) = \dfrac{1}{301}$.

c) $g'(-2) = 4$.

d) $g'(-2) = 301$.

e) $g'(-2) = -4$.

21) QCM -Parmi les égalités suivantes, lesquelles sont correctes ?

a) $\text{Arccos}\big((\sin(\pi))\big) = -\dfrac{\pi}{2}$.

b) $\text{Arcsin}\big(\cos(\pi)\big) = -\dfrac{\pi}{2}$.

c) $\text{Arcsin}\big(\sin(\frac{6\pi}{7})\big) = \dfrac{6\pi}{7}$.

d) $\text{Arccos}\big(\cos(\frac{6\pi}{7})\big) = -\dfrac{6\pi}{7}$.

e) $\text{Arctan}\big(\tan(\frac{6\pi}{7})\big) = -\dfrac{\pi}{7}$.

22) QCM -Soit a un paramètre réel. Dans $\mathbb{R}^3$, on note S_a l'ensemble des solutions du système linéaire suivant

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & a \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi, par exemple, S_{-1} est l'ensemble des solutions du système obtenu en remplaçant a par -1.
Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont correctes ?

a) Si $a = 2$, l'ensemble S_2 est une droite de $\mathbb{R}^3$.

b) Si $a = 1$, l'ensemble S_1 est une droite de $\mathbb{R}^3$.

c) Si $a = 0$, l'ensemble S_0 est une droite de $\mathbb{R}^3$.

d) Si $a = -1$, l'ensemble S_{-1} contient un unique point de $\mathbb{R}^3$.

e) Si $a = -2$, l'ensemble S_{-2} est l'ensemble vide.

23) QCM -Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par

$$u_n = n\left(\frac{7}{8}\right)^n.$$

Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont correctes.

a) $\forall n \geqslant 1, \quad \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1 \iff n \geqslant 10.$

b) $\forall n \geqslant 1, \quad u_{n+1} \leqslant u_n \iff n \geqslant 7.$

c) $\sup\{u_n, \quad n \geqslant 1\} = u_1.$

d) $\sup\{u_n, \quad n \geqslant 1\} = u_7.$

e) $\inf\{u_n, \quad n \geqslant 1\} = u_1.$

24) QCM -Soit g une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Le calcul de g' donne le tableau de signes suivant (dans lequel $-$ signifie strictement négatif et $+$ strictement positif) :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On donne de plus les limites et valeurs suivantes :

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = 0, \quad g(0) = \ln 2, \quad g(1) = -1, \quad \lim_{x\to+\infty} g(x) = 1.$$

Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont correctes ?

a) L'équation $g(x) = 0$ a exactement 2 solutions réelles.

b) L'équation $g(x) = \ln 2$ a exactement 1 solution réelle.

c) L'équation $g(x) = 1$ a exactement 1 solution réelle.

d) L'équation $g(x) = 1$ a exactement 2 solutions réelles.

e) L'équation $g(x) = -1$ a exactement 1 solution réelle.

25) QCM -Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x\cos x - \sin x.$$

Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont correctes ?

a) La fonction f est paire.

b) La fonction f est strictement décroissante sur $]0, \pi[$.

c) La fonction f réalise une bijection de $[\pi, 2\pi[$ sur $[-\pi, 2\pi[$.

d) La fonction f s'annule au moins une fois sur l'intervalle $]0, \pi[$.

e) La fonction f tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.